

# Was messen Temperatursensoren in einer Biomasse-Feuerung wirklich ?

## What Is Really Measured by Temperature Sensors in a Biomass Furnace ?

Robert Bauer, Markus Gölles, Thomas Brunner, Nicolaos Dourdoumas und Ingwald Obernberger

---

In Biomasse-Feuerungsanlagen wird eine Vielzahl von Temperatursensoren eingesetzt. Einerseits müssen diese Sensoren gegenüber Verschmutzung, mechanischen Beanspruchungen und großen Temperatursprüngen unempfindlich sein; andererseits sollen sie möglichst kostengünstig sein. Dadurch werden bewußt Kompromisse hinsichtlich einer schnellen und genauen Messung eingegangen. In diesem Beitrag werden einfache mathematische Modelle vorgestellt, die den Zusammenhang zwischen Prozessgrößen und den gemessenen Temperaturen beschreiben. Man kann sie zur Abschätzung der tatsächlichen Temperaturen und für modellbasierte Regelungsstrategien einsetzen.

Many temperature sensors are used in biomass furnaces. They have to be insensitive to dirt, mechanical load and big temperature fluctuations; but on the other hand they have to be cheap. Hence a compromise concerning a fast and accurate measurement is accepted. This article presents simple mathematical models describing the relation between process values and measured temperatures. They are applicable for the estimation of real temperatures and for model based control strategies.

**Schlagwörter:** Biomasse-Feuerungsanlage, Modellbildung, Temperatursensor

**Keywords:** Biomass furnace, modelling, temperature sensor

---

## 1 Einleitung

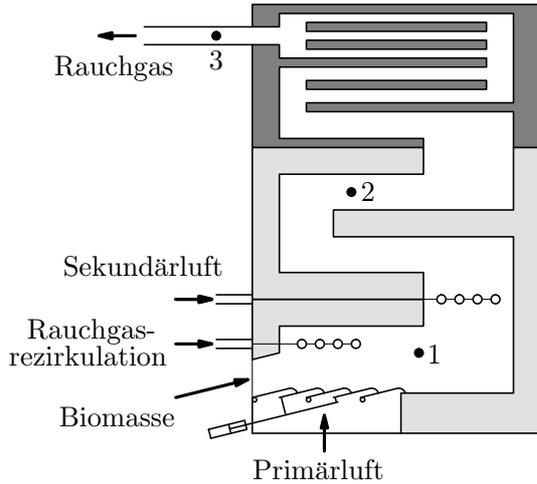
Biomasse ist im Vergleich zu fossilen Brennstoffen ein nachhaltiger, CO<sub>2</sub>-neutraler Energieträger und gewinnt daher zunehmend an Bedeutung [4]. Im vorliegenden Beitrag handelt es sich insbesondere um feste Biomasse wie z.B. Hackschnitzel, Rinde und Sägemehl. Deren Nachteil im Vergleich zu fossilen Brennstoffen ist die wesentlich größere Schwankungsbreite von Eigenschaften des Brennstoffs wie Wassergehalt, Korngröße, Dichte, etc. Für eine „gute“ Regelung des Verbrennungsprozesses ist daher eine möglichst wahrheitsgetreue Erfassung wichtiger Prozessgrößen entscheidend. Eine wichtige Größe ist die Temperatur des Rauchgases an verschiedenen Stellen einer Feuerungsanlage. Bild 1 zeigt schematisch drei übliche Positionen für Temperatursensoren in einer typischen modernen Biomasse-Feuerung (Primärverbrennungszone (1), Sekundärverbrennungszone (2) und nach dem Rauchrohrwärmetauscher (3)). Natürlich müssen diese Sen-

soren unempfindlich gegenüber Verschmutzungen und mechanischen Belastungen sein. Weiters dürfen schnelle Temperaturänderungen die Sensoren nicht beschädigen und schließlich sollen die anfallenden Kosten in einem moderaten Rahmen bleiben. Deswegen werden teilweise Temperatursensoren eingesetzt, die prinzipiell nicht die gewünschte aktuelle Rauchgas-Temperatur messen können<sup>1</sup>. Diese Diskrepanz ist allgemein bekannt, wird aber speziell bei Regelungsstrategien kaum beachtet.

In den nachfolgenden Ausführungen werden einfache mathematische Modelle vorgestellt, die den Zusammenhang zwischen Prozessgrößen und gemessenen Temperaturen hinreichend genau wiedergeben. Hierzu werden zunächst die notwendigen Mechanismen der Wärmeübertragung prinzipiell erläutert. Anschließend wird gezeigt, wie mit diesen Erkenntnissen die physikali-

---

<sup>1</sup> Speziell im Feuerraum ist die Messung der Rauchgas-Temperatur eine große technologische Herausforderung. Zur Zeit wird dies mit sogenannten Absaugpyrometern bewerkstelligt, die keinesfalls für einen Dauereinsatz geeignet sind.



**Bild 1:** Lage der Temperatursensoren in einer typischen modernen Biomasse-Feuerung.

schen Verhältnisse bei den entsprechenden Sensoren beschrieben werden können. Die Funktionstüchtigkeit der entwickelten Modelle wird mit Messdaten einer Feuerungsanlage des Kplus - Kompetenzzentrums Austrian Bioenergy Centre gezeigt. Die Anlage besitzt eine thermische Nennleistung von 180 [kW] und ist schematisch in Bild 1 dargestellt. Basierend auf den gemessenen Temperaturverläufen der Sensoren und den mathematischen Modellen werden die jeweiligen Rauchgas-Temperaturverläufe *berechnet* und mit den *tatsächlichen* Rauchgas-Temperaturen verglichen. Zur Messung der tatsächlichen Rauchgas-Temperaturen wurden jeweils geeignete Messsysteme eingesetzt. Abschließend werden einige interessante Einsatzmöglichkeiten der Modelle aufgezeigt.

## 2 Grundlagen der Wärmeübertragung

### 2.1 Konvektiver Wärmeübergang

Wenn zwischen einem strömenden Fluid (z.B. Rauchgas) und einem Festkörper (z.B. ein Temperatursensor) ein Energieaustausch durch Wärmeleitung stattfindet, so spricht man von konvektivem Wärmeübergang. Der Wärmestrom  $\dot{Q}$  vom Fluid zum Festkörper beträgt dann [3]:

$$\dot{Q} = \alpha_m A (T_{F1} - T_{FK}). \quad (1)$$

Hierbei bedeuten  $\alpha_m$  der mittlere Wärmeübergangskoeffizient,  $A$  die wirksame Fläche,  $T_{F1}$  die Temperatur des Fluids und  $T_{FK}$  die Temperatur des Festkörpers. Der Wärmeübergangskoeffizient ist von vielen Faktoren abhängig. Er wird mit Hilfe der Nußeltzahl  $Nu$ , der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  des Fluids und der charakteristischen Länge  $L$  berechnet:

$$\alpha_m = Nu \frac{\lambda}{L}. \quad (2)$$

Für einen querangeströmten Zylinder (also die typische Einsatzform für einen Temperatursensor) mit dem Durchmesser  $d$  ist die charakteristische Länge gleich dem halben Umfang, also  $d\pi/2$ . Die Nußeltzahl setzt sich in diesem Fall (und für  $10 < Re < 10^7$ ,  $0,6 < Pr < 1000$ ) aus einem laminaren Teil

$$Nu_{lam} = 0.664 \sqrt{Re} \sqrt[3]{Pr} \quad (3)$$

und einem turbulenten Teil

$$Nu_{turb} = \frac{0.037 Re^{0.8} Pr}{1 + 2.443 Re^{-0.1} (Pr^{2/3} - 1)} \quad (4)$$

zusammen [3]:

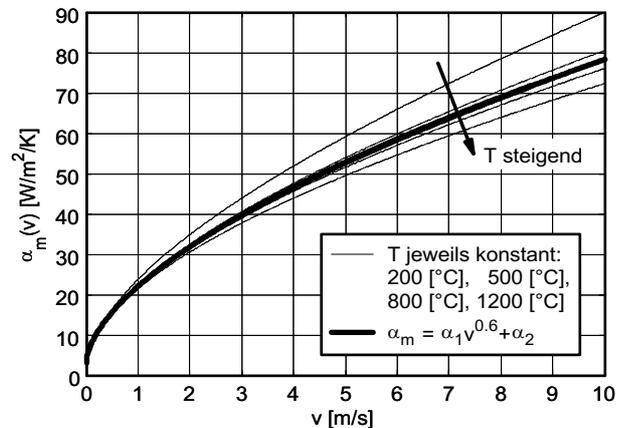
$$Nu = 0.3 + \sqrt{Nu_{lam}^2 + Nu_{turb}^2}. \quad (5)$$

Hierbei ergeben sich die Reynolds-Zahl  $Re$  und die Prandtl-Zahl  $Pr$  aus den Beziehungen

$$Re = \frac{v\rho L}{\eta} \quad Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda} \quad (6)$$

mit der Geschwindigkeit  $v$ , der Dichte  $\rho$ , der dynamischen Viskosität  $\eta$  und der spezifischen Wärmekapazität  $c_p$  des Fluids.

Betrachtet man die Abhängigkeit des Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_m$  von der Geschwindigkeit und Temperatur<sup>2</sup> des Fluids für eine typische Rauchgaszusammensetzung, erhält man das in Bild 2 dargestellte Ergebnis. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass der mittlere Wär-



**Bild 2:** Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_m$  als Funktion der Geschwindigkeit  $v$  und Temperatur  $T$  des Fluids.

meübergangskoeffizient  $\alpha_m$  stark von der Geschwindigkeit abhängt, aber praktisch unabhängig von der Temperatur des Fluids ist. Weiters ist auch bei Stillstand des Fluids, also bei  $v = 0$ , der Wärmeübergangskoeffizient größer als Null. Man kann die in Bild 2 ersichtliche Abhängigkeit mathematisch mit Hilfe der Gleichung

$$\alpha_m = \alpha_1 v^{0.6} + \alpha_2 \quad (7)$$

<sup>2</sup> Die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , die Dichte  $\rho$ , die dynamische Viskosität  $\eta$  und die spezifische Wärmekapazität  $c_p$  des Fluids sind von der Temperatur abhängig.

mit den reellen, positiven Konstanten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  näherungsweise erfassen.

## 2.2 Wärmestrahlung

Jeder Körper emittiert einen Wärmestrom entsprechend dem Gesetz [3]:

$$\dot{Q}_{em} = A\varepsilon\sigma T^4. \quad (8)$$

Hierbei bedeuten  $A$  die wirksame Fläche,  $\varepsilon$  der Emissionsgrad,  $\sigma$  die Stefan-Boltzmann-Konstante und  $T$  die absolute Temperatur in Kelvin. Der Emissionsgrad hängt wiederum vom Material, vom Zustand der Oberfläche und von der Temperatur ab<sup>3</sup>. Es wird nun eine besonders einfache Anordnung untersucht, bei der zwei isotherme Körper (mit jeweiliger Fläche  $A_i$ , Emissionsgrad  $\varepsilon_i$  und Temperatur  $T_i$ ) gegenseitig Energie durch Wärmestrahlung austauschen (Bild 3). Der Körper 2

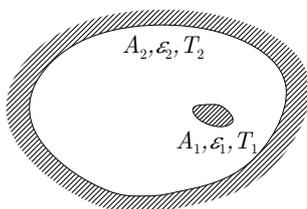


Bild 3: Zwei Körper im Strahlungsaustausch.

umschließt vollständig den Körper 1 und ist von ihm durch ein Medium getrennt, das den Strahlungsaustausch nicht beeinflusst<sup>4</sup>. Zwei Sonderfälle, die für die später behandelten Sensoren wichtig sind, sollen kurz erwähnt werden [3]:

- Die Oberflächen der beiden Körper bilden zwei konzentrische Zylinder. Sind beide Körper zumindest näherungsweise *graue* Strahler, lautet der Netto-Wärmestrom (also der Wärmestrom, der netto vom Körper 1 zum Körper 2 übergeht)

$$\dot{Q}_{12} = A_1\varepsilon_{12}\sigma(T_1^4 - T_2^4) \quad (9)$$

mit der sogenannten Strahlungsaustauschzahl:

$$\varepsilon_{12} = \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \right)^{-1}. \quad (10)$$

- Die Fläche des Körpers 2 ist sehr viel größer als die Fläche von Körper 1 ( $A_2 \gg A_1$ ). Dadurch erscheint für den kleinen Körper 1 die Umhüllung 2 wie ein Schwarzer Körper. Ist der kleine Körper 1 (zumindest

<sup>3</sup> Genau genommen gibt es noch weitere Abhängigkeiten von der Wellenlänge und von der Richtung der Strahlung. Hier wird der sogenannte „hemisphärische Gesamt-Emissionsgrad“ betrachtet, der alle Wellenlängenbereiche und alle Richtungen des Halbraums zusammenfasst.

<sup>4</sup> Gerade bei Feuerungsanlagen treten Gase (wie CO<sub>2</sub> und H<sub>2</sub>O) auf, die Strahlung relativ stark emittieren und absorbieren. Dies wird später geigneter berücksichtigt.

näherungsweise) ein *graue* Strahler, ergibt sich für den Netto-Wärmestrom vom Körper 1 zum Körper 2:

$$\dot{Q}_{12} = A_1\varepsilon_1\sigma(T_1^4 - T_2^4). \quad (11)$$

Elektrische Nichtleiter - wie Schamott und andere Keramiken - verhalten sich (insbesondere im für Feuerungen interessanten Wellenlängenbereich) in guter Näherung wie *graue* Strahler. Blanke Metalle können im Allgemeinen nicht als *graue* Strahler behandelt werden, Metalle mit oxidierter und verschmutzter Oberfläche hingegen schon. Es ist zu bemerken, dass bei beiden Sonderfällen die sonst übliche Annahme eines *diffusen* Strahlers *nicht* notwendig ist.

## 2.3 Wärmestrom und Temperatur

Es wird ein isothermer Körper mit der Temperatur  $T$  betrachtet. Wird diesem Körper Energie ausschließlich durch Wärme zu- oder abgeführt, ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{mc_p} \sum \dot{Q} \quad (12)$$

mit der Masse  $m$ , der Wärmekapazität  $c_p$  und der Summe aller *zugeführten* (gerichteten) Wärmeströme  $\dot{Q}$  [2]. Die Wärmekapazität ist wiederum von der Temperatur abhängig.

## 3 Temperatursensoren im „kühlen“ Rauchgas

Unter „kühlem“ Rauchgas versteht man hier Rauchgas mit einer Temperatur von ca. 200 bis 400 [°C], wie es insbesondere nach einem Wärmetauscher auftritt. Für diesen Bereich werden üblicherweise Widerstandstempatursensoren (etwa mit einem Pt100 als Messwiderstand) eingesetzt, deren Aufbau in Bild 4 dargestellt ist. Der Messwiderstand sei isotherm und hat genau die

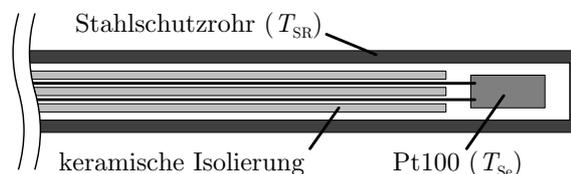
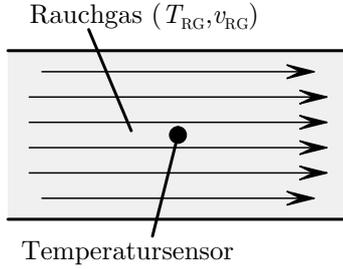


Bild 4: Aufbau eines typischen Widerstandstempatursensors mit Pt100 für „kühles“ Rauchgas.

Sensor-Temperatur  $T_{Se}$ , die vom Sensor gemessen wird. Es gibt auch Bauformen mit zwei ineinander gesteckten Schutzrohren, die durch entsprechende Vorkehrungen meistens in gutem thermischen Kontakt stehen. Modellhaft können sie dann als ein einziges (dickeres) Schutzrohr behandelt werden. In beiden Fällen kann aufgrund

der guten Wärmeleitfähigkeit von Stahl das Schutzrohr (zumindest im Bereich der Sensorspitze) isotherm mit der Temperatur  $T_{\text{SR}}$  angenommen werden. Da es vom Rauchgas in der in Bild 5 dargestellten Weise umströmt



**Bild 5:** Temperatursensor im Rauchgas.

ist, gilt für den konvektiven Wärmestrom vom Rauchgas zum Schutzrohr (siehe Gleichung (1))

$$\dot{Q}_{\text{konv, RG-SR}} = \alpha_m A_{\text{SR}} (T_{\text{RG}} - T_{\text{SR}}) \quad (13)$$

mit der wirksamen Schutzrohrfläche  $A_{\text{SR}}$ . Wie im Abschnitt 2.1 gezeigt, ist der mittlere Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_m$  im Wesentlichen nur von der Rauchgasgeschwindigkeit  $v_{\text{RG}}$  abhängig. Aufgrund der relativ niedrigen Temperatur ist die Wirkung der Wärmestrahlung auf das Schutzrohr praktisch vernachlässigbar. Der Wärmestrom  $\dot{Q}_{\text{SR-Se}}$  vom Schutzrohr zum Messwiderstand ist schwierig erfassbar und hängt wesentlich von konstruktiven Maßnahmen für einen guten thermischen Kontakt ab. Da aber die Masse des Messwiderstands sicher viel kleiner als die Masse des Schutzrohrs ist, gilt im Wesentlichen:

$$\left| \dot{Q}_{\text{SR-Se}} \right| \ll \left| \dot{Q}_{\text{konv, RG-SR}} \right|. \quad (14)$$

Somit ergibt sich entsprechend der Differentialgleichung (12) für die Schutzrohr-Temperatur

$$\begin{aligned} \frac{dT_{\text{SR}}}{dt} &= \frac{1}{m_{\text{SR}} c_{p, \text{SR}}} \left( \dot{Q}_{\text{konv, RG-SR}} - \dot{Q}_{\text{SR-Se}} \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{m_{\text{SR}} c_{p, \text{SR}}} \dot{Q}_{\text{konv, RG-SR}} = \\ &= \frac{\alpha_m A_{\text{SR}}}{m_{\text{SR}} c_{p, \text{SR}}} (T_{\text{RG}} - T_{\text{SR}}) \end{aligned} \quad (15)$$

mit der wirksamen Masse  $m_{\text{SR}}$  und der Wärmekapazität  $c_{p, \text{SR}}$  des Schutzrohrs. Für den Messwiderstand gilt

$$\frac{dT_{\text{Se}}}{dt} = \frac{1}{m_{\text{Se}} c_{p, \text{Se}}} \dot{Q}_{\text{SR-Se}}$$

mit der wirksamen Masse  $m_{\text{Se}}$  und der Wärmekapazität  $c_{p, \text{Se}}$  des Sensor-Widerstands. Da aber die Masse  $m_{\text{Se}}$  sehr klein ist, wird bei transienten Vorgängen die Differenz  $|T_{\text{SR}} - T_{\text{Se}}|$  wesentlich schneller als die Differenz  $|T_{\text{RG}} - T_{\text{SR}}|$  abklingen. Die Annahme

$$T_{\text{Se}} \approx T_{\text{SR}} \quad (16)$$

stellt daher eine gute Näherung dar. Mit der Abkürzung

$$c_1 := \frac{\alpha_m A_{\text{SR}}}{m_{\text{SR}} c_{p, \text{SR}}} \quad (17)$$

ergibt sich das mathematische Modell 1.Ordnung

$$\frac{dT_{\text{Se}}}{dt} = c_1 (T_{\text{RG}} - T_{\text{Se}}), \quad (18)$$

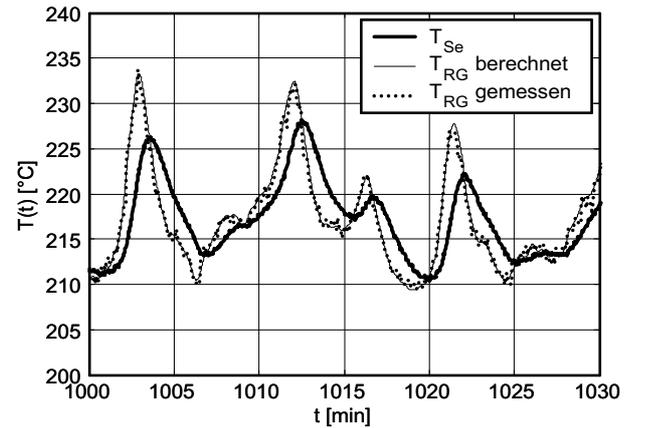
wobei der Koeffizient  $c_1$  im Wesentlichen nur von der Rauchgasgeschwindigkeit abhängt und näherungsweise mit

$$c_1 = c_{11} v_{\text{RG}}^{0.6} + c_{12} \quad (19)$$

beschrieben werden kann.

### 3.1 Experimentelle Verifikation

Die Koeffizienten wurden durch Messdaten aus geeigneten Experimenten mit Hilfe numerischer Optimierungsalgorithmen ermittelt (Benutzung eines quadratischen Gütekriteriums). Um die Funktionstüchtigkeit dieses Modells besonders gut zeigen zu können, wurde bei der Feuerungsanlage des Kplus - Kompetenzzentrums Austrian Bioenergy Centre im Betrieb ein Rauchgas-Analyse-Messgerät eingesetzt, das die tatsächliche Rauchgastemperatur  $T_{\text{RG}}$  verzögerungsfrei misst. Weiters wurde mit Hilfe des mathematischen Modells (18) aus der gemessenen Sensortemperatur  $T_{\text{Se}}$  die entsprechende Rauchgastemperatur  $T_{\text{RG}}$  berechnet, die notwendig wäre, um die Sensortemperatur zu erhalten. Bild 6 zeigt die sehr gute Übereinstimmung zwischen berechneter und gemessener Rauchgastemperatur sowie die relativ stark abweichende Sensortemperatur.

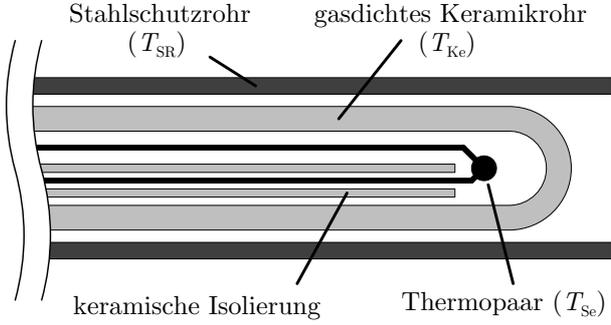


**Bild 6:** Vergleich zwischen berechneter und gemessener Rauchgastemperatur.

## 4 Temperatursensoren im Feuerraum

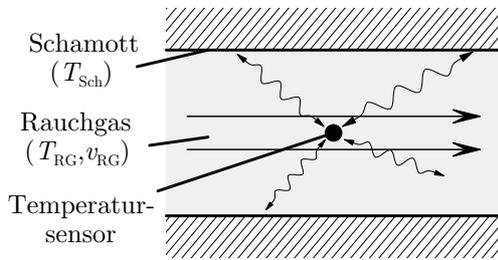
Im Feuerraum einer Biomasse-Feuerungsanlage treten Temperaturen bis zu 1200 [°C] auf. Kurzfristig kann die

Temperatur des Rauchgases noch höher liegen. Für diesen Teil der Anlage werden üblicherweise Thermopaar-Temperatur Sensoren eingesetzt, deren Aufbau in Bild 7 dargestellt ist. Das Thermopaar hat genau die Sensor-



**Bild 7:** Aufbau eines typischen Thermopaar-Temperatur Sensors für den Feuerraum.

Temperatur  $T_{Se}$ , die vom Sensor gemessen wird. Das innere, gasdichte Schutzrohr aus Keramik mit der Temperatur  $T_{Ke}$  schützt das Thermopaar vor „Vergiftung“ durch Fremdatome, die sonst zu einer Drift zwischen gemessener und tatsächlicher Sensor-Temperatur führen würde. Um das keramische Schutzrohr vor mechanischen Beanspruchungen zu schützen, wird zusätzlich ein (an der Spitze offenes) Stahlschutzrohr mit der Temperatur  $T_{SR}$  verwendet. Da es vom Rauchgas in der in Bild 8 dargestellten Weise umströmt ist, gilt für den konvek-



**Bild 8:** Temperatursensor im Feuerraum.

ven Wärmestrom vom Rauchgas zum Schutzrohr wieder (siehe Gleichung 13):

$$\dot{Q}_{\text{konv, RG-SR}} = \alpha_{m,SR} A_{SR} (T_{RG} - T_{SR}). \quad (20)$$

Im Feuerraum darf aufgrund der hohen Temperaturen die Wärmestrahlung nicht vernachlässigt werden. Würde das Rauchgas die Strahlung nicht beeinflussen, würde bei isothermer Schamottoberflächen-Temperatur  $T_{Sch}$  für den Wärmestrom

$$\dot{Q}_{\text{Str, Sch-SR}} = A_{SR} \varepsilon_{SR} \sigma (T_{Sch}^4 - T_{SR}^4) \quad (21)$$

gelten, da die Schamottoberfläche wesentlich größer als die wirksamen Schutzrohrfläche  $A_{SR}$  ist (siehe Gleichung (11)). Im Allgemeinen wird die Schamottoberfläche jedoch nicht isotherm sein; zusätzlich beeinflusst das Rauchgas durch Absorption und Emission die

Verhältnisse. Um alle Effekte mathematisch elegant beschreiben zu können, wird nun eine modifizierte Schamottoberflächen-Temperatur  $\tilde{T}_{Sch}$  eingeführt. Als Temperatur einer schwarzen Hohlraumstrahlung aufgefasst, soll sie die gleiche Wirkung auf das Schutzrohr wie die realen Verhältnisse im Feuerraum haben:

$$\dot{Q}_{\text{Str, FR-SR}} = A_{SR} \varepsilon_{SR} \sigma (\tilde{T}_{Sch}^4 - T_{SR}^4). \quad (22)$$

Diese neu eingeführte Temperatur erscheint zunächst schwer erfassbar. In erster Näherung kann man sich darunter aber durchaus eine „mittlere“ Schamott-Temperatur  $T_{Sch}$  vorstellen, die zusätzlich von der Rauchgas-Temperatur  $T_{RG}$  beeinflusst wird. Die Schamott-Temperatur  $T_{Sch}$  hängt von vielen Faktoren ab, wird aber im Wesentlichen ebenfalls von der Rauchgas-Temperatur  $T_{RG}$  beeinflusst. So gesehen ist es unerheblich, ob man die (unbekannte, sie wird ja nicht gemessen) Schamott-Temperatur  $T_{Sch}$  oder gleich die „neue“ Temperatur  $\tilde{T}_{Sch}$  als Wirkung der Rauchgas-Temperatur  $T_{RG}$  betrachtet.

Der Wärmestrom vom äußeren Stahlschutzrohr zum inneren Keramikschutzrohr kann wieder mit einem konvektiven Teil

$$\dot{Q}_{\text{konv, SR-Ke}} = \alpha_{m,Ke} A_{Ke} (T_{SR} - T_{Ke}) \quad (23)$$

und einem Strahlungsteil

$$\dot{Q}_{\text{Str, SR-Ke}} = A_{Ke} \varepsilon_{SR,Ke} \sigma (T_{SR}^4 - T_{Ke}^4) \quad (24)$$

beschrieben werden. Der Emissionsgrad  $\varepsilon_{SR,Ke}$  kann gemäß Gleichung (10) berechnet werden, weil die beiden Schutzrohre zwei konzentrische Zylinder darstellen. Da die Masse des Thermopaars wieder sehr klein ist, kann aufgrund der gleichen Überlegungen wie im Abschnitt 3 näherungsweise

$$T_{Se} \approx T_{Ke} \quad (25)$$

gesetzt werden. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\alpha_{m,SR} A_{SR}}{m_{SR} c_{p,SR}} & c_2 &= \frac{A_{SR} \varepsilon_{SR} \sigma}{m_{SR} c_{p,SR}} \\ c_3 &= \frac{\alpha_{m,Ke} A_{Ke}}{m_{SR} c_{p,SR}} & c_4 &= \frac{A_{Ke} \varepsilon_{SR,Ke} \sigma}{m_{SR} c_{p,SR}} \\ c_5 &= \frac{\alpha_{m,Ke} A_{Ke}}{m_{Ke} c_{p,Ke}} & c_6 &= \frac{A_{Ke} \varepsilon_{SR,Ke} \sigma}{m_{Ke} c_{p,Ke}} \end{aligned} \quad (26)$$

ergibt sich das mathematische Modell 2.Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{dT_{SR}}{dt} &= c_1 (T_{RG} - T_{SR}) + c_2 (\tilde{T}_{Sch}^4 - T_{SR}^4) \\ &\quad + c_3 (T_{Se} - T_{SR}) + c_4 (T_{Se}^4 - T_{SR}^4) \\ \frac{dT_{Se}}{dt} &= c_5 (T_{SR} - T_{Se}) + c_6 (T_{SR}^4 - T_{Se}^4). \end{aligned} \quad (27)$$

Es ist zu bemerken, dass

$$c_3 c_6 = c_4 c_5 \quad (28)$$

gilt und bei der Koeffizientenbestimmung berücksichtigt werden kann.

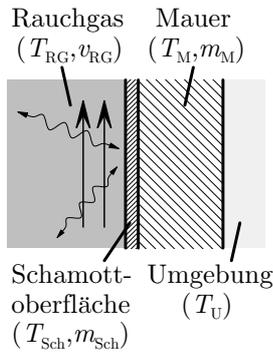
#### 4.1 Vorschlag für ein einfaches Modell für $\tilde{T}_{\text{Sch}}$

Das folgende mathematische Modell soll als Vorschlag für eine einfache Modellierung der modifizierten Schamottoberflächen-Temperatur  $\tilde{T}_{\text{Sch}}$  verstanden werden und hat sich bei der Feuerungsanlage des Kplus - Kompetenzzentrums Austrian Bioenergy Centre in der Sekundärverbrennungszone bewährt. Im Gegensatz zum mathematischen Modell des Temperatursensors hängt dieses Modell natürlich sehr stark von der betrachteten Anlage und von der Lage des Sensors ab. Daher ist im Allgemeinen zu erwarten, dass bei anderen Feuerungsanlagen Modifikationen nötig sein werden.

Wie bereits im Abschnitt 4 erwähnt, kann man sich unter  $\tilde{T}_{\text{Sch}}$  eine „mittlere“ Schamott-Temperatur  $T_{\text{Sch}}$  vorstellen, die durch Absorption und Emission des Rauchgases zusätzlich beeinflusst wird. Diese Beeinflussung soll hier näherungsweise mit

$$\tilde{T}_{\text{Sch}}^4 = (1 - \varepsilon_{\text{RG}}) T_{\text{Sch}}^4 + \varepsilon_{\text{RG}} T_{\text{RG}}^4 \quad (29)$$

beschrieben werden<sup>5</sup>. Der Emissionsgrad  $\varepsilon_{\text{RG}}$  ist vor allem von den Partialdrücken der strahlenden Anteile und von der gleichwertigen Schichtdicke des Rauchgases abhängig [3]. Im Folgenden wird die Schamottoberflächen-Temperatur  $T_{\text{Sch}}$  genauer untersucht. Ausgangspunkt ist die vereinfachende Annahme von nur zwei isothermen Körpern, nämlich die für die Strahlung maßgebliche Schamottoberfläche sowie die „Mauer“, die die Speicherwirkung des Schamotts wiedergeben soll (siehe Bild 9). Der Wärmestrom vom Rauchgas auf die Scha-



**Bild 9:** Modellhafte Sicht des Schamotts.

mottoberfläche kann wieder mit einem konvektiven Teil

$$\dot{Q}_{\text{konv, RG-Sch}} = \alpha_{\text{m, Sch}} A_{\text{Sch}} (T_{\text{RG}} - T_{\text{Sch}}) \quad (30)$$

und einem Strahlungsanteil

$$\dot{Q}_{\text{Str, RG-Sch}} = A_{\text{Sch}} \varepsilon_{\text{RG-Sch}} \sigma (T_{\text{RG}}^4 - T_{\text{Sch}}^4) \quad (31)$$

<sup>5</sup> Diese Modellierung ist stark vereinfachend, weil Absorptions- und Emissionsgrad von Gas nur im thermodynamischen Gleichgewicht gleich groß sind.

beschrieben werden. Der Wärmestrom von der Oberfläche zur Mauer basiert auf Wärmeleitung und kann mathematisch wie Konvektion behandelt werden:

$$\dot{Q}_{\text{Sch-M}} = \alpha_{\text{m, M}} A_{\text{Sch}} (T_{\text{Sch}} - T_{\text{M}}) \quad (32)$$

Von der Mauer zur Umgebung wirken wieder ein konvektiver Anteil

$$\dot{Q}_{\text{M-U}} = \alpha_{\text{m, U}} A_{\text{M}} (T_{\text{M}} - T_{\text{U}}) \quad (33)$$

sowie ein Strahlungsanteil, der aber aufgrund der niedrigen Temperaturen und einer meist verwendeten Strahlenschutzfolie hier vernachlässigt werden soll. Mit den Abkürzungen

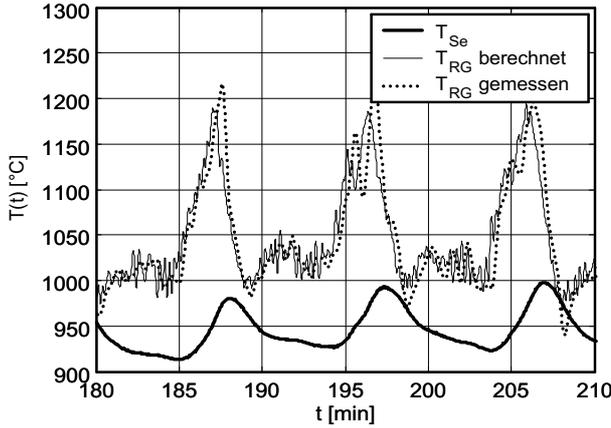
$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\alpha_{\text{m, Sch}} A_{\text{Sch}}}{m_{\text{Sch}} c_{p, \text{Sch}}} & d_2 &= \frac{A_{\text{Sch}} \varepsilon_{\text{RG-Sch}} \sigma}{m_{\text{Sch}} c_{p, \text{Sch}}} \\ d_3 &= \frac{\alpha_{\text{m, M}} A_{\text{Sch}}}{m_{\text{Sch}} c_{p, \text{Sch}}} & d_4 &= \frac{\alpha_{\text{m, M}} A_{\text{Sch}}}{m_{\text{M}} c_{p, \text{M}}} \\ d_5 &= \frac{\alpha_{\text{m, U}} A_{\text{M}}}{m_{\text{M}} c_{p, \text{M}}} \end{aligned} \quad (34)$$

ergibt sich das mathematische Modell 2.Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{dT_{\text{Sch}}}{dt} &= d_1 (T_{\text{RG}} - T_{\text{Sch}}) + d_2 (T_{\text{RG}}^4 - T_{\text{Sch}}^4) \\ &\quad + d_3 (T_{\text{M}} - T_{\text{Sch}}) \\ \frac{dT_{\text{M}}}{dt} &= d_4 (T_{\text{Sch}} - T_{\text{M}}) + d_5 (T_{\text{U}} - T_{\text{M}}) \\ \tilde{T}_{\text{Sch}} &= \sqrt[4]{(1 - \varepsilon_{\text{RG}}) T_{\text{Sch}}^4 + \varepsilon_{\text{RG}} T_{\text{RG}}^4} \end{aligned} \quad (35)$$

#### 4.2 Experimentelle Verifikation

Die Koeffizienten für das mathematische Modell des Temperatursensors wurden durch eine Vielzahl geeigneter Experimente (sprungförmige Temperaturänderungen, verschiedene definierte Gasgeschwindigkeiten, zusätzliche Messung der Temperatur des Stahlenschutzrohres, etc.) bestimmt. Anschließend wurde bei der Biomasse-Feuerungsanlage des Kplus - Kompetenzzentrums Austrian Bioenergy Centre im Betrieb die tatsächliche Rauchgastemperatur  $T_{\text{RG}}$  in der Sekundärverbrennungszone mit einem Absaugpyrometer verzögerungsfrei gemessen und aufgrund des mathematischen Modells (27) und der Sensortemperatur  $T_{\text{Se}}$  die modifizierte Schamottoberflächen-Temperatur  $\tilde{T}_{\text{Sch}}$  berechnet. Basierend auf dieser Temperatur  $\tilde{T}_{\text{Sch}}$  und der Rauchgastemperatur  $T_{\text{RG}}$  wurden die Koeffizienten des mathematischen Modells (35) ermittelt. Abschließend wurde die Rauchgastemperatur nur aufgrund der Sensortemperatur  $T_{\text{Se}}$  und beider mathematischer Modelle berechnet. Bild 10 zeigt die berechnete und gemessene Rauchgastemperatur sowie die sehr stark abweichende Sensortemperatur. Da ein nichtlineares mathematisches Modell 4.Ordnung für die Berechnung zugrunde liegt, ist das Ergebnis prinzipiell störanfälliger als etwa in Abschnitt 3.



**Bild 10:** Vergleich zwischen berechneter und gemessener Rauchgastemperatur.

Abschließend soll noch auf ein bemerkenswertes rechen-technisches Detail aufmerksam gemacht werden: Im Zuge obiger Berechnungen muss für jeden Zeitpunkt eine reelle, positive Nullstelle des Polynoms in  $T_{SR}$

$$(c_6)T_{SR}^4 + (c_5)T_{SR} + \left(-c_5T_{Se} - c_6T_{Se}^4 - \frac{dT_{Se}}{dt}\right) \quad (36)$$

berechnet werden (siehe 2. Differentialgleichung von (27)). Mit numerischen Näherungsverfahren ist diese Aufgabe natürlich leicht bewältigbar. Aufgrund der besonderen Struktur kann die gesuchte Nullstelle aber auch explizit (!) angegeben und somit auch deutlich schneller berechnet werden (Anhang A).

## 5 Zusammenfassung

Es wurden einfache und trotzdem hinreichend genaue mathematische Modelle für Temperatursensoren vorgestellt, die den Zusammenhang zwischen Prozessgrößen und den gemessenen Temperaturen wiedergeben. Bei Temperatursensoren im „kühlen“ Rauchgas kann sehr gut auf die tatsächliche Rauchgastemperatur geschlossen werden. Bei Sensoren im Feuerraum ist ein zusätzliches mathematisches Modell für die Strahlungstemperatur notwendig, welches auch vom betrachteten Feuerraum und von der Sensorposition abhängt. Trotzdem konnte bei den Versuchen an der Feuerungsanlage des Kplus - Kompetenzzentrums Austrian Bioenergy Centre auch hier relativ gut auf die tatsächliche Rauchgastemperatur geschlossen werden. Daher ergeben sich unter anderem folgende Einsatzmöglichkeiten:

- Erstmals können die tatsächlichen Rauchgas-Temperaturen nur mit Hilfe der bereits bestehenden Sensoren ermittelt werden. Nach einmaliger Bestimmung der Koeffizienten kann auf zusätzliche teure Sensoren wie Absaugpyrometer verzichtet werden. Dieser Umstand ist - abgesehen von den Kosten - aus zwei weiteren Gründen interessant: Erstens stören Absaugpyrometer die Feuerungsanlage nicht

unerheblich, weil prinzipbedingt dem Feuerungsprozess Rauchgas und Energie entzogen wird. Zweitens müssen nach kurzen Zeitabständen Wartungspausen eingelegt werden, in denen keine Messwerte zur Verfügung stehen. Unbeeinflusste Langzeitversuche sind somit nicht möglich.

- Die hier entwickelten Modelle können für eine modellbasierte Regelung verwendet werden.

## A Polynom 4.Grades

Bei Berechnungen mit konvektivem Wärmestrom und Wärmestrahlung tritt immer wieder das Problem auf, von einem Polynom 4. Ordnung eine reelle, positive Nullstelle zu berechnen (vergl. etwa Polynom (36)), d.h. die Gleichung

$$x^4 + dx + e = 0 \quad (37)$$

zu lösen. Es ist bemerkenswert, dass aufgrund physikalischer Beschränkungen der Parameter  $d$  immer positiv ist. Die Idee zur Nullstellenbestimmung obiger Gleichung (*L. Ferrari*, 16. Jh.) besteht darin, diese so umzuschreiben, dass sie einer Beziehung zwischen zwei vollständigen Quadraten entspricht [1]. Hierzu benutzt man eine kubische Gleichung bezüglich einer Hilfsgröße  $y$ . Durch Benutzung der Identität

$$(x^2 + y)^2 = x^4 + (2y)x^2 + y^2 \quad (38)$$

bekommt Gleichung (37) die Form

$$(x^2 + y)^2 = (2y)x^2 + (-d)x + (y^2 - e). \quad (39)$$

Die rechte Seite von (39) wird zum vollständigen Quadrat, wenn

$$(-d) = 2\sqrt{(2y)}\sqrt{(y^2 - e)} \quad (40)$$

gilt, wenn also  $y$  die kubische Gleichung

$$y^3 - ey - \frac{d^2}{8} = 0 \quad (41)$$

erfüllt! Die nach *Cardano* genannte Formel

$$y = \sqrt[3]{\frac{d^2}{16} + \sqrt{\left(\frac{d^2}{16}\right)^2 - \left(\frac{e}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{d^2}{16} - \sqrt{\left(\frac{d^2}{16}\right)^2 - \left(\frac{e}{3}\right)^3}}. \quad (42)$$

liefert eine zugehörige Lösung, die aufgrund der besonderen Struktur immer (auch bei negativer Diskriminante) reell und positiv ist. Damit können beide Seiten der Gleichung (39) als vollständiges Quadrat

$$(x^2 + y)^2 = \left(\sqrt{(2y)}x + \frac{(-d)}{2\sqrt{(2y)}}\right)^2 \quad (43)$$

geschrieben werden. Zieht man die Wurzel, erhält man die beiden quadratischen Gleichungen

$$x^2 \pm \left(\sqrt{2y}\right) x + \left(y \mp \frac{d}{2\sqrt{2y}}\right) = 0, \quad (44)$$

deren Lösungen identisch mit den Nullstellen der Gleichung (37) sind. Sie lauten:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{\sqrt{2y}}{2} \pm \sqrt{+\frac{d}{2\sqrt{2y}} - \frac{y}{2}}, \\ x_{3,4} &= +\frac{\sqrt{2y}}{2} \pm \sqrt{-\frac{d}{2\sqrt{2y}} - \frac{y}{2}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Die letzten beiden Nullstellen  $x_{3,4}$  sind immer komplex, weil  $d$  und  $y$  positiv sind. Da eine absolute Temperatur gesucht ist und diese positiv sein muss, kann von den ersten beiden Nullstellen nur die erste in Frage kommen:

$$x_1 = \sqrt{\frac{d}{2\sqrt{2y}} - \frac{y}{2}} - \frac{\sqrt{2y}}{2}. \quad (46)$$

## Literatur

- [1] *Alten H.-W., Naini A.D., Folkerts M., Schlosser H., Schlote K.-H., Wußing H.*: 4000 Jahre Algebra. Geschichte, Kulturen, Menschen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
- [2] *Baehr H.D., Kabelac S.*: Thermodynamik. 13. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [3] *Baehr H.D., Stephan K.*: Wärme- und Stoffübertragung. 5. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [4] *Obernberger I.*: Nutzung fester Biomasse in Verbrennungsanlagen. dbv-Verlag, Graz, 1997.

Manuskripteingang: 20. Juli 2007.

---

**Dr. Robert Bauer** ist Assistent am Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz. Hauptarbeitsgebiete: Steuerung und Regelung von Mehrgrößensystemen, neue Regelungskonzepte für Biomasse-Feuerungsanlagen.

Adresse: Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, TU Graz, Kopernikusgasse 24, 8010 Graz, ÖSTERREICH, E-Mail: robert.bauer@TUGraz.at

**Dipl.-Ing. Markus Gölles** ist Junior Researcher am Austrian Bioenergy Centre und Dissertant am Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz. Arbeitsgebiet: Regelung von Biomassefeuerungsanlagen.

Adresse: Austrian Bioenergy Centre GmbH, Inffeldgasse 21b, 8010 Graz, ÖSTERREICH, E-Mail: markus.golles@abc-energy.at

**Dr. Thomas Brunner** leitet am Austrian Bioenergy Centre den Bereich Biomasseverbrennung - Mittelgroße Anlagen und Großanlagen. Des Weiteren ist er Senior Researcher am Institut für Ressourcenschonende und Nachhaltige Systeme, TU Graz. Hauptarbeitsgebiete: Feuerungstechnik, Optimierung von Biomassefeuerungsanlagen, aschenbedingte Probleme in Biomassefeuerungsanlagen.

Adresse: Austrian Bioenergy Centre GmbH, Inffeldgasse 21b, 8010 Graz, ÖSTERREICH, E-Mail: thomas.brunner@abc-energy.at

**O.Univ.-Prof. Dr. Nicolaos Dourdoumas** ist Professor am Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz. Hauptarbeitsgebiete: Regelungstheorie, rechnerunterstützter Regelkreisentwurf.

Adresse: Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, TU Graz, Kopernikusgasse 24, 8010 Graz, ÖSTERREICH, E-Mail: nicolaos.dourdoumas@TUGraz.at

**Prof. Univ.-Doz. Dipl.-Ing. Dr. Ingwald Obernberger** ist Professor für Thermochemische Biomassekonversion an der Technischen Universität Eindhoven (Niederlande), Leiter der Arbeitsgruppe „Thermische Biomassenutzung“ an der Technischen Universität Graz und Key Researcher am Austrian Bioenergy Centre Graz für die Forschungsbereiche „Biomasseverbrennung - Mittelgroße Anlagen und Großanlagen“ und „Modellierung und Simulation“. Hauptarbeitsgebiete: Entwicklung und Modellierung von Biomasseverbrennungssystemen.

Adresse: Institut für Ressourcenschonende und Nachhaltige Systeme, Technische Universität Graz, Inffeldgasse 21b, 8010 Graz, ÖSTERREICH, E-Mail: obernberger@bios-bioenergy.at